***Тема: Перпендикулярность прямой и плоскости.***

***Вопросы:***

1. Определение перпендикулярных прямых в пространстве.
2. Лемма о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей.
3. Определение перпендикулярных прямой и плоскости.
4. Теорема о перпендикулярности двух параллельных прямых к плоскости (прямая и обратная).
5. Признак перпендикулярности прямой и плоскости.
6. Теорема о прямой, перпендикулярной к плоскости.

***Вопрос 1.***

**Определение:** Две прямые в пространстве могут пересекаться. (Привести примеры перпендикулярных прямых, используя окружающую обстановку).

***Вопрос 2.***

**Лемма:** Если одна из двух прямых перпендикулярна к третьей прямой, то другая прямая перпендикулярна к этой прямой.

Дано: a || b, a  c

Доказать: b  c



Рисунок 1.

Доказательство:

Через т.М | М  a, М  b и М  c проведем прямые MA || a и MC || c. Так как a  c (по условию), то  АМС =900. По условию a || b и MA || a (по построению) значит, b || MA (по теореме о трех параллельных прямых). Тогда прямые b и c параллельны соответственно МА и МС, угол между которыми 900  b  c, что и требовалось доказать.

***Вопрос 3.***

**Определение:**Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

(Возможна запись: a  или a).

Прямая, перпендикулярная к плоскости пересекает эту плоскость.

a    a  b, a  c, a  d.



Рисунок 2.

***Вопрос 4.***

**Теорема:** Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая также перпендикулярна к этой плоскости.

Дано: a || b, a  .

Доказать: b  .



Рисунок 3.

Доказательство:

Проведем в плоскости  произвольную прямую с. Так как a  , то a  с (по определению). Согласно лемме, если а перпендикулярна с, то и b, параллельная а также перпендикулярна с. Так как с – произвольная прямая, то b перпендикулярна . (по определению). Что и требовалось доказать.

Теорема (обратная): Если 2 прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.

(Доказать предлагается учащимся самостоятельно).

***Вопрос 5:***

Теорема: Если прямая, не лежащая в плоскости перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то прямая и плоскость перпендикулярны.

Предлагается 2 способа доказательства.

I способ:

Дано: a , b, c, b x c=0, a b, a  c

Доказать: a  .



Рисунок 4.

Доказательство:

Проведем в плоскости  произвольную прямую р. (Если р не проходит через т.О, то можно провести р| || р через т.О) На прямых a, b, c, и p’ отложим векторы , ,  и  соответственно. Так как  ,  и , то =x+y (известно из курса планиметрии). Так как a  b, то · =0; так как a  c , то ·=0. Докажем, что . Найдем их скалярное произведение ·= ( x+y)=x·+y·=0 a  p. Так как p произвольная прямая плоскости , то a   (по определению). Что и требовалось доказать.

II способ.

Дано: m, n, m x n=0, l m, l  n

Доказать: l .



Доказательство:

Проведем прямую p так, чтобы O  p и p || l. l m, l  n и p || l  p  n и p  m. Пусть P и P1 – точки прямой p такие, что OP=OP1. Тогда m и n –оси симметрии и значит,  - плоскость симметрии для этих точек, а следовательно, p  . p   и p || l l . Что и требовалось доказать.

**Замечание:**Еще одно доказательство теоремы в учебнике “Геометрия 10-11” Л.С. Атанасяна и др.

**Свойства перпендикулярных прямой и плоскости:**

1. Через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная к данной прямой.
2. Если две плоскости  и  перпендикулярны к прямой а ,то они параллельны.
3. Если одна из двух параллельных плоскостей перпендикулярна к прямой, то и другая плоскость перпендикулярна к этой прямой.

Теорема: Через любую точку пространства не принадлежащую плоскости проходит прямая перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.

Дано: , А .

Доказать:  a | A  a, a  .



Рисунок 5.

Доказательство:

1. Проведем в  произвольную прямую а; построим плоскость  а, проходящую через т.А  =b В плоскости  через А проведем прямую с | c   (c b по построению c  а, т.к.   ). Значит, с и есть искомая прямая.
2. Докажем, что она единственная. Допустим, что это не так и существует прямая с1  , тогда с || c1 ,что не возможно т.к. с х с1=А. Таким образом, через А проходит только одна прямая к 

. Что и требовалось доказать

*Можно предложить учащимся подготовить к семинару ответы на следующие вопросы:*

1. Верно ли что: если 2 прямые в пространстве перпендикулярны к третьей прямой, то это утверждение при условии, что все три прямые параллельны? Верно ли это утверждение при условии, что все три прямые лежат в одной плоскости?
2. Прямая а || , а b  

. Существует ли прямая перпендикулярная к прямым а и b?