Урок №238-239

Тема урока: Равносильные преобразования уравнений.

**Задание:**

1.Составьте конспект по теме;

2.Выполните самостоятельную работу.

1) ***Определение.*** Два уравнения с одной переменной ***f(х) = g(х)*** и ***h(х) = р(х)*** называют равносильными, если они имеют одинаковые корни или если оба уравнения не имеют корней.

Например, уравнения  **- 4** = 0 и (***х + 2)(2Х - 4***) = 0 равносильны; равносильны и уравнения ***х2 + 1 = 0*** и ***= - 2*** - они не имеют корней.

2) ***Определение***. Если каждый корень уравнения ***f(х) = g(х)***  (1)

является в то же время корнем уравнения ***h(х) = р(х)***  (2),

то уравнение (2) называется следствием уравнения (1).

Например, уравнение ***х - 2 = 3*** имеет корень ***5***, уравнение - ***25 = 0*** имеет корни ***± 5***. Так как корень уравнения ***х - 2 = 3*** является корнем уравнения ***х2 - 25 = 0***, то уравнение ***х2 - 25 = 0*** является следствием,, уравнения ***х - 2 = 3.***

Следовательно, **два уравнения называют равносильными** тогда и только тогда, когда каждое из них является следствием другого.

3) Если в ходе преобразований, при переходе от одного из уравнений к уравнению-следствию, мы неуверенны в равносильности выполняемого перехода, то у последнего уравнения могут появиться ***посторонние корни*** в отношении исходного уравнения. Поэтому все полученные корни уравнения- следствия необходимо проверить, подставляя их в исходное уравнение. Тем самым, ***проверка найденных корней уравнения является*** не проверкой верности выполненных технических преобразований, а неотъемлемой частью, этапом решения уравнения.

4) Итак, мы выяснили, что в процессе решения уравнений (а ещё более при решении неравенств) на каждом этапе преобразований крайне важно знать, равносильный ли переход мы совершаем. Сформулируем и обсудим ряд важных для нас положений.

**Теорема 1.** Если какой-либо член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному уравнению.

**Теорема 2.** Если обе части уравнения возвести в одну и ту же нечётную степень, то получится уравнение, равносильное данному уравнению.

**Теорема 3**. Показательное уравнение (где  **> 1, 1**) равносильно уравнению ***f(х) = g(х).***

***Определение***. Областью определения уравнения ***f(х) = g(х)*** или ОДЗ переменной уравнения называется множество тех значений ***х***, при которых одновременно имеют смысл обе части уравнения ***f(х) = g(х).***

**Теорема 4**. Если обе части уравнения ***f(х) = g(х)*** умножить на одно и то же выражение ***h(х),*** которое имеет смысл всюду в области определения (ОДЗ) уравнения ***f(х) = g(х)*** и при этом нигде в этой области ***h(х) 0***, то уравнения ***f(х) = g(х)*** и ***h(х)∙ f(х) = h(х) g(х)*** равносильны.

То есть, мы можем обе части уравнения умножать или делить на одно и то же отличное от нуля число, не нарушая при этом равносильности уравнений.

**Теорема 5.** Если обе части уравнения ***f(х) = g(х)*** неотрицательны на ОДЗ уравнения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же степень ***n*** получится уравнение  ***gn(x),*** равносильное исходному уравнению.

**Теорема 6.** Если ***f(х)>0, = g(х)>0***, то уравнение ***logα 2 f(x) = log αg(x)***, где ***а>0,*** , равносильно уравнению ***f(х) = g(х).***

5) Рассмотрим применение теоретических положений на практике. Пусть нам дано уравнение ***х - 1 = 3***, корень которого равен ***4***.

*а)* Умножив обе части уравнения на выражение ***х - 2***, получим уравнение ***(х - 1 )(х - 2) = 3(х - 2).*** Решим полученное уравнение

***х2 — Зх + 2 = Зх - 6, х2 - 6х + 8 = 0, x1 = 2, х2 = 4.***

То есть, уравнение-следствие имеет два корня ***2*** и ***4***, причём, ***2***-посторонний корень для исходного уравнения. Каким образом у исходного уравнения появился посторонний корень? - Если бы мы вначале преобразовали исходное уравнение к виду ***х - 4 = 0***. За тем домножили обе части уравнения на ***х - 2***. То получили бы уравнение ***(х - 4)(х - 2) = 0***, которое равносильно совокупности уравнении. Тогда понятно, что уравнение ***х - 2 = 0***, по отношению к исходному уравнению ***х - 4 = 0***, является посторонним уравнением, отсюда и появление постороннего корня. Фактически мы умножили обе части исходного уравнения на выражение ***х - 2***, допуская при этом его равенство нулю, что невозможно по теореме ***4***.

*б)* Возведём в квадрат обе части уравнения ***х - 1 = 3***. Получим уравнение-следствие ***(х-1)2 = 9***. Откуда ***х2 - 2х - 8 = 0, х1 = - 2, х2 = 4***. Вновь у уравнения-следствия появляется посторонний корень по отношению к исходному уравнению. Преобразовав уравнение ***(х-1)2 = 9*** к виду ***(х-4)(х+ 2)=0***, получаем постороннее уравнение ***х + 2 = 0*** и посторонний корень ***-2***. Нарушено условие теоремы 5: возводя в квадрат, мы «забыли», что при возведении в квадрат должно выполняться условие ***х - 1 >0***.

*в)* Рассмотрим уравнение ***ln (2х - 4) = 1n(3х - 5).*** Потенцируя, получим уравнение ***2х - 4 = Зх - 5.*** Откуда **х = 1**. Проверкой убеждаемся, что ***1*** является посторонним корнем для исходного уравнения. В данном случае произошло не появление постороннего уравнения, а расширение ОДЗ исходного уравнения. У исходного уравнения ОДЗ: (2; + ), у полученного уравнения ОДЗ - вся числовая прямая. Тем самым не нарушены требования теоремы 6.

6) ***Выводы.*** Исходное уравнение преобразуется в процессе решения в уравнение-следствие, значит, необходимо обязательное выполнение проверки всех найденных корней, если: расширилась ОДЗ уравнения; возводились в одну и ту же чётную степень обе части уравнения; выполнялось умножение обеих частей уравнения на одно и тоже выражение с переменной.

**V Закрепление учебного материала**

1) № 1663; № 1665(а, в); № 1666 (а, б).

2) Переходя к решению уравнений, мы будем стараться учесть следующие два момента. С одной стороны наши решения уравнений должны содержать необходимое теоретическое обоснование нашей деятельности. С другой стороны мы будем учитывать, что в дальнейшем, при решении неравенств, в большинстве случаев от нас потребуется обеспечение равносильности переходов в преобразованиях, и поэтому уже на данном этапе - при решении уравнений, мы будем отрабатывать именно эти навыки, дабы обеспечить преемственность способов деятельности.

Пусть на дано уравнение **g(x)** Возведя в квадрат обе части уравнения, получим уравнение ***f(х) = g2(х)*** которое можно записать так:

***(-g(x))(+g(x))=0***

Откуда получаем совокупность уравнений: .

Имеем постороннее уравнение, и могут появиться посторонние корни. Следовательно, необходима проверка корней. Если мы захотим выполнить равносильный переход и обойтись без проверки, то исходное уравнение

равносильно смешанной системе:

3) Решим уравнения (двумя способами):

а) ; б );

в) ; г) .

 а) *Первый способ.* Решение. ОДЗ уравнения: ***х > - 11***. После возведения обеих частей уравнения в квадрат, получим уравнение-следствие ***х2 -Зх-10 = 0*** с корнями ***- 2*** и ***5***. Оба корня принадлежат ОДЗ уравнения, но это не меняет сути дела и мы вынуждены выполнить проверку корней.

*Проверка.* Подставив ***x1= - 2***, получим - неверное равенство, ***- 2*** - посторонний корень.

Подставив ***х2 = 5***, получим или **4 = 4** - верное равенство, **5** корень исходного уравнения.

*Ответ:* ***5****.*

а) *Второй способ*. Решение. Исходное уравнение равносильно системе

 или решение системы и исходного

уравнения **х2 = 5.**

*Ответ:* ***5.***

б) *Первый способ*. Решение. ОДЗ уравнения: **.** Возведя обе части

уравнения в квадрат и приведя подобные слагаемые, получим уравнение ***х 2- х = 0***. Откуда ***x1 = 0, х2 = 1***. Опять оба корня принадлежат ОДЗ уравнения, но будут ли они корнями исходного уравнения ничего сказать нельзя.

*Проверка*. Подставив **x1 = 0**, получим **-** верное равенство, ***0***- корень исходного уравнения.

Подставив ***х2 = 1***, получим - верное равенство, ***1*** - корень исходного уравнения.

*Ответ:* ***0;1****.*

б) *Второй способ.* Решение. Исходное уравнение равносильно системе

 или . Откуда решение системы и исходного уравнения **0** и **1**.

*Ответ****: 0;1.***

в) *Первый способ.* Решение. ОДЗ уравнения: ***-1.*** Возведя обе части уравнения в квадрат и приведя подобные слагаемые, получим уравнение. Откуда ***x1 = 0, х2 =.*** Оба корня принадлежат ОДЗ

уравнения. Выполним проверку.

*Проверка*. Подставив ***x1 = 0***, получим - неверное равенство, ***0***-посторонний корень.

Подставив ***х2 =,*** получим - неверное равенство, -посторонний корень.

Оба корня принадлежат ОДЗ переменной уравнения, но при этом являются посторонними корнями. Ответ: корней нет.

в) *Второй способ*. Решение. Исходное уравнение равносильно системе или . Система решений не имеет, значит, и уравнение тоже решений не имеет.

*Ответ:* ***корней нет.***

г) *Первый способ*. Решение. ОДЗ уравнения задаётся решением системы , или которая решений не имеет. Значит, ОДЗ уравнения - пустое множество, уравнение решений не имеет.

*Ответ:* ***корней нет.***

г) *Второй способ*. Решение. Исходное уравнение равносильно системе или Система решений не имеет, значит, и исходное уравнение тоже решений не имеет.

*Ответ:* ***корней нет****.*

4) № 1676 (а) .

*Решение.* Произведение двух сомножителей равно нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю, а второй сомножитель при этом имеет смысл.

а) ***х2 - 9 = 0, х = ± 3.***

Проверим, имеет ли смысл при этих значениях второй сомножитель.

При ***x1 =-3,*** - имеет смысл, поэтому - ***3*** - корень уравнения; при ***х2 = 3,*** - не имеет смысла, ***3*** не является корнем уравнения.

б) **, .**

Уравнение равносильно системе или

Решением системы является число ***1***. Так как ***х2- 9*** имеет смысл при всех значениях переменной, то ***1*** является и корнем исходного уравнения.

*Ответ:* ***- 3; 1.***

5) **Выводы.** При решении иррациональных уравнений - возведении обеих частей уравнения в чётную степень, принадлежность полученных корней ОДЗ уравнения не позволяет сделать вывод, о том являются ли эти корни посторонними или нет. Поэтому выполнение проверки корней обязательно и это этап решения уравнения. Если корень не принадлежит ОДЗ то он, конечно, посторонний корень уравнения. В то же время, записывая систему равносильную уравнению, мы не нарушаем логики решения уравнения: ведь уравнение с пустой ОДЗ равносильно системе, не имеющей решений.

**VI Самостоятельная работа**

Решить уравнение двумя способами.

I вариант II вариант

№ 7.4 (а) № 7.5 (б)

 № 7.7 (а)№ 7.7 (б)